# Espaces vectoriels normés [3/3]

EL BAKKALI EL KADI Taha

College of Computing
UM6P

# Compacité

**Définition 1**

Une partie $A$ de $E$ est dite compacte si toute suite d'éléments de $A$ possède au moins une valeur d'adhérence dans $A$.

Remarque: La définition d'une partie compacte s'appuie sur la convergence de suites. Elle dépend donc de la norme utilisée.

Exercice 2: Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $E$, et $A$ une partie de $F$. Montrer que $A$ est un compact de $E$ si, et seulement si, $A$ est un compact de $F$.

### Proposition 3

Une suite à valeurs dans une partie compacte est convergente si, et seulement si, elle admet une unique valeur d'adhérence.

### Proposition 4

Toute partie compacte est fermée et bornée.

Remarque: Si une suite $(u_n)$ est telle qu'il existe $\alpha > 0$ vérifiant :

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2,\ n \neq p \implies ||u_n - u_p|| \geq \alpha,$$

alors $(u_n)$ ne possède aucune sous-suite convergente. Ainsi, pour montrer qu'une partie $A$ n'est pas compacte, il suffit d'exhiber une suite d'éléments de $A$ vérifiant la propriété ci-dessus.

Exercice 5: Soit $E = \mathbb{R}[X]$, muni de la norme

$$\|P\| = \sum_{k=0}^{n} |a_k| \quad \text{si } P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k.$$

Notons $A = \overline{B}(0,1)$ la boule unité fermée de $E$.

Justifier que $A$ est une partie fermée et bornée, n'est pas compacte.

**Définition 6**

On dit que $A$ est **BL-compact** si, pour toute famille $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts de $E$ telle que $K \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, il existe un sous-ensemble fini $J \subset I$ tel que:

$$A \subset \bigcup_{i\in J} U_i.$$

Autrement dit, de tout recouvrement par des ouverts on peut extraire un recouvrement fini.

**Proposition 7**

Si $A$ est **BL-compact** de $E$, alors $A$ est compact de $E$.

Remarque: La reciproque est aussi vraie (Exercice du TD).

## Proposition 8

Toute partie fermée d'une partie compacte est compacte

## Proposition 9

Soient $E_1, \dots, E_p$ des espaces vectoriels normés. Si $A_1, \dots, A_p$ sont des parties compactes de $E_1, \dots, E_p$ respectivement, alors le produit $A_1 \times \cdots \times A_p$ est une partie compacte de l'espace produit $E_1 \times \cdots \times E_p$ (muni de la norme produit).

Exercice 10: Montrer que, dans $(\mathbb{K}^r, \|\cdot\|_\infty)$, une partie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

Exercice 11: Montrer que l'ensemble suivant est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$ :

$$K = \Big\{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n \;\Big|\; \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1\Big\}.$$

**Proposition 12**

L'image d'un compact par une application continue est un compact

Remarque: Cette proposition entraîne que l'image par $f$ de tout fermé de $E$ (où $E$ est compact) est un fermé (une application vérifiant cette propriété est dite *fermée*). Ceci est faux en général.

**Proposition 13**

Soit $f : E \to F$ une application continue et bijective. Si $E$ est compact, alors $f^{-1} : F \to E$ est continue. Autrement dit, $f$ est un homéomorphisme.

Remarque: Pour toute fonction continue et bijective $f : I \to J$, où $I, J$ sont des intervalles de $\mathbb{R}$, l'application réciproque $f^{-1}$ est continue.

## Proposition 14

Soit $A$ une partie compacte non vide, toute application continue $f : A \to \mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes : il existe $x_1, x_2 \in A$ tels que $f(x_1) = \min_{x \in A} f(x)$ et $f(x_2) = \max_{x \in A} f(x)$.

Exemple 15: Si $A$ est un compact non vide de $E$, alors il existe $a \in A$, tq $d(x, A) = ||x - a||$.

Exemple 16: Si $A$ et $B$ sont deux compacts non vide de $E$, alors il existe $a \in A$ et $b \in B$ tq $d(A, B) = ||a - b||$.

Exercice 17: Considérons la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x,y) = \frac{e^{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}.$$

1. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe $R > 0$ tel que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus B(0,R), \quad |f(x,y)| > a.$$

2. Justifier que $g$ possède un minimum global.

**Proposition 18**

Toute application continue sur un compacte est uniformément continue.

# Compacité en dimension finie

**Proposition 19**

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toute suite bornée possède au moins une valeur d'adhérence, i.e. admet au moins une sous suite convergente.

**Proposition 20**

Les parties compactes d'un espace vectoriel de dimension finie sont ses parties fermées bornées.

**Proposition 21**

Dans un espace vectoriel normé, tout sous-espace vectoriel de dimension finie est un fermé.

# Equivalence des normes en dimension finie

**Proposition 22**

Dans un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

# Espaces de banach

## Définition 23

On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p \geq N,\ \forall q \geq N,\ ||u_p - u_q|| < \varepsilon.$$

**On dit qu'un evn $E$ est un espace de banach, si toute suite de cauchy de $E$ est convegente.**

## Proposition 24

1. Une suite convergente est une suite de Cauchy.
2. Une suite de Cauchy est bornée.
3. Une suite de cauchy qui admet une v.a est convergente.

## Proposition 25

$\mathbb{R}$ est un espace de banach.

**Proposition 26**

$\mathbb{R}^n$ est un espace de banach.

**Proposition 27**

Tout evn de dimension finie est un espace de banach.

**Proposition 28**

On considère $X$ un ensemble non vide et $\mathcal{B}(X, E)$ l'espace vectoriel des fonctions bornées, définies sur $X$ et à valeurs dans $E$. On munit $\mathcal{B}(X, E)$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par

$$\forall f \in \mathcal{B}(X, E), \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|.$$

Si l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est un espace de banach, alors l'espace $(\mathcal{B}(X, E), \|\cdot\|_\infty)$ est aussi de banach.

### Proposition 29

Soit $E$ un evn de banach et une application $f : E \to E$ contractante, c'est-à-dire qu'il existe un réel $k \in [0, 1[$ vérifiant

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad ||f(x) - f(y)|| \leq k\,||x - y||.$$

Alors $f$ admet un unique point fixe.

# Espaces connexes par arcs

**Définition 30**

On appelle chemin de $A$ (une partie non vide de $E$) toute application continue $\gamma : [0,1] \to E$ telle que $\gamma([0,1]) \subset A$ . L'image $\gamma([0,1])$ du chemin s'appelle un arc, $\gamma(0)$ l'origine, $\gamma(1)$ son extrémité.

**Définition 31**

On dit que $A$ (une partie non vide de $E$) est connexe par arcs si pour tout $(a,b) \in A^2$, il existe un arc inclus dans $A$ d'origine $a$ et d'extrémité $b$.

Exemple 32: Toute partie convexe non vide d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs.

**Proposition 33**

Soit $A$ une partie non vide de $E$ et $f : E \to E$ continue. Si $A$ est connexe par arcs dans $E$ alors $f(A)$ est connexe par arcs dans $F$.

Exemple 33: $GL_n(R)$ n'est pas connexe par arcs.

**Proposition 34**

Soit $A$ une partie non vide de $E$.

1. La relation sur $A^2$ définie par
$$\forall x, y \in A,\ x \sim_A y \iff \exists \gamma \in \mathcal{C}([0,1], A),\ \begin{cases} \gamma(0) = x \\ \gamma(1) = y \end{cases}$$
est une relation d'équivalence.
2. Les classes d'équivalence pour $\sim_A$ sont connexes par arcs. On appelle ces classes composantes connexes par arcs.